

TD n°5: Le théorème des résidus

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Généralités sur les résidus

Exercice 1. Quelques calculs.

1. Démontrer que si f a un zéro d'ordre 1 en a alors

$$\operatorname{Res}_a(1/f) = \frac{1}{f'(a)}.$$

On fait le développement de f au voisinage de a : on a $f(z) = (z-a)f'(a) + (z-a)^2g(z)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(z)} &= \frac{1}{(z-a)} \cdot \frac{1}{f'(a) + (z-a)g(z)} \\ &= \frac{1}{(z-a)} \cdot \frac{1}{f'(a)} \cdot \left(1 - \frac{(z-a)g(z)}{f'(a)} + \frac{(z-a)^2g(z)^2}{f'(a)^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Le terme de degré -1 de cette série est clairement $\frac{1}{f'(a)}$.

2. Calculer le résidu de $\frac{1}{z^n-1}$ en $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$.

On a une fonction de la forme précédente, avec $f(z) = z^n - 1$, qui a n racines simples, notons-les ζ^k avec $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Le résidu en ζ^k est donc $\frac{1}{f'(\zeta^k)} = \frac{1}{n\zeta^{n-k}} = \frac{\zeta^k}{n}$.

3. Calculer le résidu de $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ en $n\pi$.

$\cot(z) = \frac{1}{\tan(z)}$ a des pôles simples aux $n\pi$. La dérivée de $\tan(z)$ est $1 + \tan^2(z)$. Comme $\tan(n\pi) = 0$, on trouve un résidu de 1 en chaque pôle.

4. Démontrer que si $f \in \mathcal{M}(U)$ a un pôle d'ordre n en $a \in U$, alors

$$\operatorname{Res}_a(f) = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} ((z-a)^n f(z)) \right]_{z=a}.$$

On écrit, au voisinage de a :

$$f(z) = \sum_{k \geq -n} a_k (z-a)^k$$

Ainsi, $(z-a)^n f(z) = \sum_{k \geq 0} a_{k-n} (z-a)^k$. Le coefficient de z^{n-1} dans cette série est a_{-1} , le résidu de f en a . Le reste découle de la formule de Taylor.

Exercice 2. Autour des résidus.

On fixe f une fonction holomorphe au voisinage de $a \in \mathbb{C}$ et g une fonction méromorphe au voisinage de a .

1. Supposons que f ne s'annule pas et que g a un pôle d'ordre 1 en a . Démontrer

$$\operatorname{Res}_a(fg) = f(a)\operatorname{Res}_a(g).$$

C'est un cas particulier de la question suivante.

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

2. Supposons à présent que g a un pôle d'ordre n en a , on écrit

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots$$

$$g(z) = b_{-n}(z-a)^{-n} + \dots + b_{-1}(z-a)^{-1} + b_0 + \dots$$

Démontrer que

$$\operatorname{Res}_a(fg) = \sum_{i+j=-1} a_i b_j.$$

On fait le produit de Cauchy des deux séries, on a

$$f(z)g(z) = \sum_{k \geq -n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) (z-a)^k$$

et on peut vérifier que le terme de degré -1 est bien celui annoncé par l'énoncé.

Exercice 3. Résidus de fractions rationnelles.

Soient $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ une fraction rationnelle de degré $\deg(f) \leq -2$ (où $\deg(f) = \deg(p) - \deg(q)$ si $f = p/q$).

1. Démontrer à l'aide du théorème des résidus que

$$\sum_a \operatorname{Res}_a(f) = 0$$

On intègre f sur un cercle de rayon R supérieur au maximum des modules des pôles de f , on a

$$2i\pi \sum_a \operatorname{Res}_a(f) = 0 = \int_{\partial \mathbb{D}(0,R)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) iRe^\theta d\theta.$$

Comme $\deg(f) \leq -2$, $f(Re^{i\theta})$ est un $O(R^{-2})$ quand $R \rightarrow \infty$, et donc cette intégrale tend vers 0 quand $R \rightarrow \infty$.

2. Démontrer que si de plus $f \in \mathbb{R}(z)$ et n'a pas de pôle sur $\mathbb{R}$, alors $\sum_{\Im(a)>0} \operatorname{Res}_p(f)$ est un imaginaire pur.

On intègre f sur le contour donné par le segment $[-R, R]$ et l'arc de cercle $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, et on obtient :

$$2i\pi \sum_{\Im(a)>0} \operatorname{Res}_a(f) = \int_{-R}^R f(t) dt + \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) iRe^\theta d\theta.$$

La première intégrale converge vers $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt \in \mathbb{R}$, et la deuxième vers 0 (pour les mêmes raisons que dans la question précédente). On en déduit que $2i\pi \sum_{\Im(a)>0} \operatorname{Res}_a(f) \in \mathbb{R}$, et donc

$$\sum_{\Im(a)>0} \operatorname{Res}_a(f) \in i\mathbb{R}.$$

3. Mettre ces résultats en défaut si la condition sur $\deg(f)$ n'est pas vérifiée.

$f(z) = 1/z$ n'a qu'un seul résidu en 0, égal à 1. $g(z) = \frac{z}{z^2+1}$ a $\frac{1}{2}$ pour résidu en i et en $-i$.

On ne suppose plus rien sur $\deg(f)$ et on définit, pour $f \in \mathbb{C}(z)$, le résidu en l'infini de f comme le résidu en $w = 0$ de $-\frac{1}{w^2} f(1/w)$.

4. Démontrer que $-\frac{1}{w^2} f(1/w)$ admet un zéro d'ordre $-\deg(f) - 2$ en $w = 0$ (où on considère un pôle d'ordre n comme un zéro d'ordre $-n$).

On écrit $f(z) = P(z)/Q(z)$, et donc

$$f(1/w) = \frac{w^{-\deg(P)} \tilde{P}(w)}{w^{-\deg(Q)} \tilde{Q}(w)}$$

avec $\tilde{P}(0), \tilde{Q}(0) \neq 0$. $f(1/w)$ a donc un zéro d'ordre $\deg(Q) - \deg(P) = -\deg(f)$ en ∞ . Il en découle que $w^{-2} f(1/w)$ a un zéro d'ordre $-\deg(f) - 2$.

5. En intégrant $f(z)dz$ sur un cercle de rayon $R > \sup_{f(z)=\infty} |z|$, démontrer que

$$\text{Res}_\infty(f) = - \sum_a \text{Res}_a(f).$$

Indication : Un cercle de rayon $R \gg 1$ orienté dans le sens direct est un petit cercle de rayon $1/R \ll 1$ orienté dans le sens indirect autour de l'infini.

Le point crucial ici est de remarquer que

$$\int_{\partial \mathbb{D}(0,R)} f(z)dz = \int_{\partial \mathbb{D}(0,1/R)} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw.$$

On peut le remarquer directement en écrivant explicitement les intégrales en fonction d'un paramètre θ . La première intégrale s'évalue, pour R assez grand, à $\sum_a \text{Res}_a(f)$, et la deuxième à $-\text{Res}_\infty(f)$, d'où l'égalité.

Exercice 4. Nombre de zéros et pôles d'une fonction rationnelle. Soit $f(z) \in \mathbb{C}(z)$. On définit, pour $a \in \mathbb{C}$ $v_a(f) = n$ si f a un zéro d'ordre n en a , $v_a(f) = -n$ si f a un pôle d'ordre n en a (en particulier, $v_a(f) = 0$ si f n'a ni zéro ni pôle en a .) On définit $v_\infty(f) = -\deg(f)$.

1. Démontrer que $v_a(f) = \text{Res}_a(f'/f)$ pour tout $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Remarquons que $v_a(f)$ est l'unique entier k tel que f s'écrit $f(z) = (z-a)^k g(z)$ avec $g(a) \neq 0, \infty$. On a alors, par additivité de la dérivée logarithmique,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-a)^{k-1}}{(z-a)^k} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{k}{z-a} + h(z)$$

avec h holomorphe au voisinage de a .

Reste à traiter le cas $a = \infty$. $-\deg(f) = k$ signifie que f s'écrit $f(z) = z^{-k} P(z)/Q(z)$ avec P, Q polynômes de même degré. On pose $g(w) = f(1/w)$, on a par la formule ci-dessus $v_\infty(f) = v_0(g)$, et

$$\frac{g'(w)}{g(w)} = -\frac{f'(1/w)}{w^2 f(1/w)}.$$

Le résidu en 0 de ceci est précisément le résidu en l'infini de $\frac{f'}{f}$.

2. A l'aide de l'exercice précédent, démontrer que

$$\sum_{a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} v_a(f) = 0.$$

Autrement dit, une fonction rationnelle a toujours autant de zéros que de pôles, comptés avec multiplicités.

On applique le résultat de l'exercice précédent à $\frac{f'}{f}$, et on a

$$0 = \sum_a \text{Res}_a(f'/f) = \sum_a v_a(f).$$

Calculs d'intégrales



Exercice 5. Une transformée de Fourier.

Calculer, pour $\xi \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx.$$

On pourra distinguer les cas $\xi \geq 0$ et $\xi \leq 0$.

On remarque avec un changement de variable $x \rightarrow -x$ que l'intégrale avec ξ est égale à celle avec $-\xi$. On considère donc $\xi \geq 0$.

On intègre sur le contour donné par le segment $[-R, R]$ et l'arc de cercle donné par $Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$. On calcule le résidu de $\frac{e^{i\xi z}}{1+z^2}$ en i : on obtient $\frac{e^{-\xi}}{2i}$. Le théorème des résidus donne alors

$$\pi e^{-\xi} = \int_{-R}^R \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx + \int_0^\pi \frac{e^{i\xi Re^{i\theta}}}{1+Re^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta.$$

Comme $\xi \geq 0$, on a $\left| e^{i\xi Re^{i\theta}} \right| = e^{-R\xi \sin(\theta)} \leq 1$. La deuxième intégrale est donc un $O(R^{-1})$ et tend vers 0 quand $R \rightarrow \infty$. On en déduit

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-\xi}$$

si $\xi \geq 0$, et donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\xi|}.$$

Exercice 6. Encore une intégrale.

Soient $s \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ vérifiant $0 < \Re(s) < n$. Calculer

$$\int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n} \frac{dx}{x}$$

à l'aide du contour donné par les segments $[0, R]$ et $[Re^{2i\pi/n}, 0]$ (avec l'orientation) et l'arc de cercle $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.

On intègre $\frac{z^{s-1}}{1+z^n}$ (où z^s est compris comme $e^{s \log(z)}$ pour la détermination principale) sur le contour donné par $[\varepsilon, R]$, puis $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi/n$, puis $[Re^{2i\pi/n}, \varepsilon e^{2i\pi/n}]$, puis $\varepsilon e^{i\theta}$, $2\pi/n \geq \theta \geq 0$.

On vérifie que les intégrales sur les arcs de cercles convergent vers 0 quand $R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ (la vérification devient habituelle, on ne la fera que lorsqu'elle n'implique pas juste de faire des estimations de grand O). Le théorème des résidus donne donc :

$$2i\pi \operatorname{Res}_{e^{i\pi/n}} \left(\frac{z^{s-1}}{1+z^n} \right) = \int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n} \frac{dx}{x} - e^{\frac{2i\pi s}{n}} \int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n} \frac{dx}{x}.$$

On calcule

$$\operatorname{Res}_{e^{i\pi/n}} \left(\frac{z^{s-1}}{1+z^n} \right) = e^{\frac{i\pi(s-1)}{n}} \frac{1}{ne^{\frac{(n-1)i\pi}{n}}} = -\frac{e^{\frac{i\pi s}{n}}}{n}.$$

En multipliant par $e^{-\frac{i\pi s}{n}}$ des deux côtés, on trouve :

$$-2i \sin\left(\frac{\pi s}{n}\right) \int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n} \frac{dx}{x} = -\frac{2i\pi}{n}$$

et on conclut que

$$\int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi s}{n}\right)}$$

Exercice 7. Jamais deux sans trois.

Calculer, pour $0 < \Re(s) < n$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^s \log(x)}{1+x^n} \frac{dx}{x}$$

en s'aidant du résultat de l'exercice précédent. Bonus : la même, avec un $\log(x)^k$.

On prend le même contour, le log ne pose pas de problème particulier. Le théorème des résidus donne

$$2i\pi \operatorname{Res}_{e^{i\pi/n}} \left(\frac{z^{s-1} \log(z)}{1+z^n} \right) = \int_0^\infty \frac{x^s \log(x)}{1+x^n} \frac{dx}{x} - e^{\frac{2i\pi s}{n}} \int_0^\infty \frac{x^s (\log(x) + \frac{2i\pi}{n})}{1+x^n} \frac{dx}{x}.$$

On peut calculer

$$\operatorname{Res}_{e^{i\pi/n}} \left(\frac{z^{s-1} \log(z)}{1+z^n} \right) = -\frac{i\pi e^{\frac{i\pi s}{n}}}{n^2}.$$

Au final, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{2\pi^2}{n^2} &= -2i \sin\left(\frac{\pi s}{n}\right) \int_0^\infty \frac{x^s \log(x)}{1+x^n} \frac{dx}{x} - \frac{2i\pi}{n} e^{\frac{i\pi s}{n}} \int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n} \frac{dx}{x} \\ &= -2i \sin\left(\frac{\pi s}{n}\right) \int_0^\infty \frac{x^s \log(x)}{1+x^n} \frac{dx}{x} - \frac{2i\pi}{n} e^{\frac{i\pi s}{n}} \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi s}{n}\right)}.\end{aligned}$$

On prend la partie imaginaire et on trouve

$$0 = -2 \sin\left(\frac{\pi s}{n}\right) \int_0^\infty \frac{x^s \log(x)}{1+x^n} \frac{dx}{x} - \frac{2\pi^2 \cos\left(\frac{\pi s}{n}\right)}{n^2 \sin\left(\frac{\pi s}{n}\right)}.$$

On réarrange et on a finalement

$$\int_0^\infty \frac{x^s \log(x)}{1+x^n} \frac{dx}{x} = -\frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi s}{n}\right)}{n^2 \sin^2\left(\frac{\pi s}{n}\right)}.$$

En étant facétieux.se, on aurait aussi pu considérer

$$I(s) = \int_0^\infty \frac{x^s}{1+x^n} \frac{dx}{x}$$

et dériver sous le signe intégral... Cette même méthode vous fournira la correction pour la question bonus.

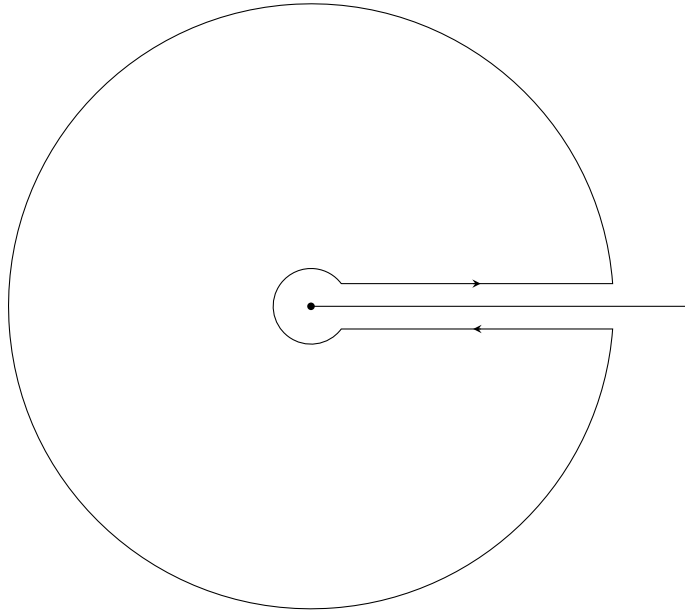


Exercice 8. Une dernière pour la route.

Soit $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ à pôles simples, sans pôle dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$, et $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $0 < \Re(s) < -\deg(f)$. Calculer

$$\int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x}$$

en fonction des $\text{Res}_a(f)$ à l'aide d'un contour Pac-Man, comme ceci :



Appliquer à $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$.

Indication : on pourra définir une détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ par $L(z) := \log(-z) + i\pi$.

On considère, pour $\delta > \varepsilon$, le contour donné par le segment $[\sqrt{\delta^2 - \varepsilon^2} + i\varepsilon, \sqrt{R^2 - \varepsilon^2} + i\varepsilon]$, l'arc de cercle $Re^{i\theta}$, $\theta \in [\arcsin(\varepsilon/R), 2\pi - \arcsin(\varepsilon/R)]$, le segment $[\sqrt{R^2 - \varepsilon^2} - i\varepsilon, \sqrt{\delta^2 - \varepsilon^2} - i\varepsilon]$ et finalement l'arc de cercle $\delta e^{-i\theta}$, $\theta \in [\arcsin(\varepsilon/\delta), 2\pi - \arcsin(\varepsilon/\delta)]$. Pour δ, ε assez petits et R assez grand, tous les pôles de f sont encerclés par ce contour. On intègre $e^{i\pi s}(-z)^s f(z)$, qui est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ sur ce contour. La difficulté principale est de ne pas se tromper sur la détermination de z^s : On remarque que si $z = re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < 2\pi$,

alors $e^{i\pi s}(-z)^s = r^s e^{is\theta}$.

Comme f n'a pas de pôle en 0 et que $\Re(s) > 1$, l'intégrale sur le petit cercle $\gamma_{\delta,\varepsilon}$ se majore comme suit

$$\left| \int_{\gamma_{\delta,\varepsilon}} (-z)^s f(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \int_0^{2\pi} \delta^{\Re(s)} e^{-\Im(s)\theta} \sup_{|z|=\delta} |f(z)| d\theta = \delta^{\Re(s)} C$$

pour C constante indépendante de δ . On peut aussi majorer l'intégrale sur $\gamma_{R,\varepsilon}$ comme suit

$$\left| \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} (-z)^s f(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \int_0^{2\pi} R^{\Re(s)} e^{-\Im(s)\theta} \sup_{|z|=R} |f(z)| d\theta$$

Comme $\deg(f) < -\Re(s)$, $|f(z)| = o(|z|^{-\Re(s)})$ quand $|z| \rightarrow \infty$, et l'intégrale est un $o(1)$ quand $R \rightarrow \infty$. Les deux intégrales qui restent à évaluer sont celles sur les segments horizontaux, qui sont

$$\int_{\sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}}^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} e^{i\pi(s-1)}(-x-i\varepsilon)^{s-1} f(x+i\varepsilon) dx, \quad \int_{\sqrt{\delta^2-\varepsilon^2}}^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} e^{i\pi(s-1)}(-x+i\varepsilon)^{s-1} f(x-i\varepsilon) dx.$$

Le point crucial ici est que $(-x-i\varepsilon)^{s-1} = e^{-i\pi(s-1)}(x+i\varepsilon)^{(s-1)}$ et $(-x+i\varepsilon)^{s-1} = e^{i\pi(s-1)}(x-i\varepsilon)^{(s-1)}$. En prenant $\varepsilon \rightarrow 0$ on trouve :

$$2i\pi \sum_{f(a)=\infty} \text{Res}_a \left(e^{i\pi(s-1)}(-z)^{s-1} f(z) \right) = \int_{\delta}^R x^s f(x) \frac{dx}{x} - \int_{\delta}^R e^{2i\pi s} x^s f(x) \frac{dx}{x} + o_{R \rightarrow \infty}(1) + o_{\delta \rightarrow 0}(1).$$

Comme f n'a que des pôles simples, on a $\text{Res}_a (e^{i\pi(s-1)}(-z)^{s-1} f(z)) = -e^{i\pi s}(-a)^{s-1} \text{Res}_a(f)$. On prend $\delta \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$, ce qui donne :

$$2i\pi \sum_{f(a)=\infty} -e^{i\pi s}(-a)^{s-1} \text{Res}_a(f) = (1 - e^{2i\pi s}) \int_0^{\infty} x^s f(x) \frac{dx}{x}.$$

En réarrangeant, on a

$$-2i\pi \sum_{f(a)=\infty} (-a)^{s-1} \text{Res}_a(f) = -2i \sin(\pi s) \int_0^{\infty} x^s f(x) \frac{dx}{x}$$

et donc

$$\int_0^{\infty} x^s f(x) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \sum_{f(a)=\infty} (-a)^{s-1} \text{Res}_a(f).$$

Pour $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$, les pôles sont les racines de $1+z+z^2$, donc $e^{\pm 2i\pi/3}$, que l'on note $\omega, \bar{\omega}$. On calcule sans peine

$$\text{Res}_{\omega}(f) = -\frac{i}{\sqrt{3}}, \text{Res}_{\bar{\omega}}(f) = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

Il ne reste qu'à vérifier que $(-\omega)^s = e^{-i\pi s/3}$ et $(-\bar{\omega})^s = e^{i\pi s/3}$. On obtient finalement :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^s}{1+x+x^2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sin(\pi s)} \frac{i}{\sqrt{3}} \left(-e^{-i\pi(s-1)/3} + e^{i\pi(s-1)/3} \right) = -\frac{2\pi \sin\left(\frac{\pi(s-1)}{3}\right)}{\sqrt{3} \sin(\pi s)}.$$

Exercice 9. Théorème de Von Dantzig.

1. Soit $a \in]0, 1[$. Démontrer à l'aide du théorème des résidus que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} \frac{\sin(\pi a)}{\cosh(\pi x) + \cos(\pi a)} dx = \frac{2 \sinh(2\pi a\xi)}{\sinh(2\pi\xi)}.$$

Rappelons les identités importantes $\cosh(iu) = \cos u$ et $\sinh(iu) = i \sin u$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$, on considère la fonction méromorphe

$$f(z) = e^{-2i\pi z \xi} \frac{\sin(\pi a)}{\cosh(\pi z) + \cos(\pi a)},$$

que l'on va intégrer sur le contour rectangulaire γ_R de sommets R , $R + 2i$, $-R + 2i$, $-R$ où $R > 0$ est un réel que l'on fera tendre vers l'infini. Les pôles de f sont les solutions de l'équation

$$\cosh(\pi z) + \cos(\pi a) = 0 \iff e^{2\pi z} + 2e^{\pi z} \cos(\pi a) + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $-4 \sin^2(\pi a)$, et on trouve donc

$$e^z = -\cos(\pi a) \pm i \sin(\pi a)$$

donc $z = i\pi(1 \pm a) + 2ni\pi$. Les pôles sont tous simples, et les deux seuls à avoir une partie imaginaire entre 0 et 2 sont $\alpha = i(1 - a)$ et $\beta = i(1 + a)$ et le théorème des résidus nous donne

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f, \alpha) + \text{Res}(f, \beta)).$$

Calculons les résidus, on trouve

$$\text{Res}_\alpha(f) = \frac{e^{-2i\pi \alpha x} \sin(\pi a)}{\pi \sinh(\pi \alpha)} = \frac{e^{2\pi(1-a)x} \sin(\pi a)}{i\pi \sin(\pi - \pi a)} = \frac{e^{2\pi(1-a)x}}{i\pi}.$$

et de même, $\text{Res}_\beta(f) = -\frac{e^{2\pi(1+a)x}}{i\pi}$. Ainsi on trouve

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = -4e^{2\pi x} \sinh(2\pi a x).$$

On décompose maintenant l'intégrale suivant les quatre intégrales sur les segments

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(t) dt + \int_0^2 f(R + iu) i du + \int_R^{-R} f(t + 2i) dt + \int_2^0 f(-R + iu) i du,$$

puis on fait tendre $R \rightarrow \infty$ pour obtenir que les intégrales sur les segments verticaux tendent vers 0 : en effet, par exemple pour la première, en minorant $|\cosh(\pi(R + iu))|$ via $|\cosh(x + iy)|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$, on a pour R assez grand

$$|f(R + iu)| \leq \frac{e^{2\pi u|x|}}{\sinh(\pi R) - 1},$$

et

$$\left| \int_0^2 f(R + iu) i du \right| \leq 2 \sup_{0 \leq u \leq 2} |f(R + iu)| \leq \frac{2e^{4\pi|x|}}{\sinh(\pi R) - 1}.$$

On regroupe les deux intégrales restantes en observant que

$$f(z + 2i) = e^{-2i\pi z \xi} e^{4\pi \xi} \frac{\sin(\pi a)}{\cosh(\pi z) + \cos(\pi a)} = e^{4\pi \xi} f(z),$$

ce qui donne, en notant $I(\xi)$ l'intégrale à calculer, que

$$(1 - e^{4\pi \xi}) I(\xi) = -4e^{2\pi \xi} \sinh(2\pi a \xi),$$

ce qui conclut.

2. En déduire que $\frac{1}{\cosh(\pi x)}$ est sa propre transformée de Fourier.

C'est une application directe de la formule précédente au cas où $a = \frac{1}{2}$.

Calculs de sommes



Exercice 10. Les valeurs de ζ aux entiers pairs.

On considère la fonction méromorphe

$$f(z) = \frac{2i\pi}{z^{2k}(e^{2i\pi z} - 1)}.$$

Pour $\Re(s) > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Démontrer que $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ est développable en série entière au voisinage de 0, et que les coefficients du développement sont rationnels. On appelle ces coefficients renormalisés par $n!$ les nombres de Bernoulli, et on note

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

La fonction $\frac{e^z - 1}{z}$ est une fonction entière ne s'annulant pas en 0 et ayant un développement en série entière à coefficients rationnels, plus précisément :

$$\frac{e^z - 1}{z} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

Son inverse est donc développable en série entière au voisinage de zéro, et puisque

$$\frac{1}{1 - g(z)} = \sum_{n \geq 0} g(z)^n$$

les coefficients de Taylor sont rationnels.

2. Démontrer que f a un pôle simple en chaque entier non-nul et calculer le résidu.
 $z \mapsto e^{2i\pi z} - 1$ a un zéro simple en tout entier naturel, et $z \mapsto z^{2k}$ ne s'annule pas en $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Il s'ensuit que f a un pôle simple en n , dont le résidu est donné par

$$\frac{1}{n^{2k}} \lim_{z \rightarrow n} \frac{2i\pi(z - n)}{e^{2i\pi(z-n)} - 1} = \frac{1}{n^{2k}}.$$

3. Démontrer que f a un pôle d'ordre $2k + 1$ en 0, de résidu $\frac{(2i\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$.
 $1/z^{2k}$ a un pôle d'ordre $2k$ en 0, et $\frac{1}{e^{2i\pi z} - 1}$ a un pôle d'ordre 1, donc f a un pôle d'ordre $2k + 1$. Le résidu se lit directement sur le développement en série de Laurent de f au voisinage de 0 :

$$f(z) = 2i\pi \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} (2i\pi)^n z^{n-2k-1} = \sum_{n \geq -2k-1} \frac{B_{n+2k+1}}{(n+2k+1)!} (2i\pi)^{n+2k+1} z^n.$$

Le coefficient de z^{-1} est $\frac{(2i\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$.

4. En intégrant f sur le carré C_N de coins $\pm(N + 1/2) \pm (N + 1/2)i$, démontrer que

$$\zeta(2k) = -\frac{(2i\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}.$$

L'intégrale sur le N -ème carré englobe les entiers $-N, \dots, -1, 1, \dots, N$ et donc

$$2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{(2i\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_N} f(z) dz.$$

Démontrons que $\frac{1}{e^{2i\pi z}-1}$ est bornée sur les carrés C_N quand $N \rightarrow \infty$. Le carré comporte quatre côtés. Le côté vertical droit est paramétré par $N + 1/2 + it, t \in [-N - 1/2, N + 1/2]$. Sur ce côté, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{e^{2i\pi(N+1/2+it)} - 1} \right| &= \left| \frac{1}{e^{2Ni\pi + i\pi - 2\pi t} - 1} \right| \\ &= \left| \frac{1}{-e^{-2\pi t} - 1} \right| \\ &= \frac{1}{1 + e^{-2\pi t}} \leq 1 \end{aligned}$$

Sur le côté vertical gauche, qui est paramétré par $-N - 1/2 + it, t \in [-N - 1/2, N + 1/2]$, on obtient exactement la même borne.

On s'occupe à présent des côtés horizontaux. Le côté horizontal haut est paramétré par $t + i(N + 1/2)$, et on obtient donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{e^{2i\pi(t+iN+1/2)} - 1} \right| &= \left| \frac{1}{e^{2i\pi t - (2N+1)\pi} - 1} \right| \\ &\leq \frac{1}{|e^{2i\pi t} e^{-(2N+1)\pi} - 1|} \\ &\leq \frac{1}{1 - e^{-(2N+1)\pi}} \end{aligned}$$

qui est borné quand $N \rightarrow \infty$. Le côté horizontal inférieur est paramétré par $t - iN - i/2, t \in [-N - 1/2, N + 1/2]$ et on obtient de manière très similaire à la manipulation précédente la borne

$$\left| \frac{1}{e^{2i\pi(t-iN-1/2)}} \right| \leq \frac{1}{e^{(2N+1)\pi} - 1}.$$

Le membre de droite converge vers 0 quand $N \rightarrow \infty$, et il en découle que $\frac{1}{e^{2i\pi z}-1}$ est bornée globalement sur les C_N .

$$\sup_{z \in C_N} |f(z)| \leq 2i\pi \sup_{z \in C_N} \left| \frac{1}{e^{2i\pi z} - 1} \right| \sup_{z \in C_N} \frac{1}{|z|^{2k}} = O(1)O(1/N^{2k}) = O(1/N^{2k}).$$

On peut alors borner

$$\left| \int_{C_N} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in C_N} |f(z)| \ell(C_N) = O(1/N^{2k-1})$$

car la longueur $\ell(C_N) = 8N + 4$ est un $O(N)$. En prenant $N \rightarrow \infty$ dans

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{(2i\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} + \frac{1}{4i\pi} \int_{C_N} f(z) dz$$

on obtient donc le résultat désiré.

Exercice 11. Une somme de cotangentes hyperboliques.

On pose, pour $k \geq 0$ entier :

$$S_k = \sum_{n \geq 1} \frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}}, \quad T_k = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{4k+3}(e^{2\pi n} - 1)}.$$

1. Démontrer que $S_k = 2T_k + \zeta(4k+3)$.

On a

$$\coth(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2z} - 1}$$

d'où

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{4k+3}(e^{2\pi n} - 1)} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{4k+3}}.$$

2. Démontrer qu'au voisinage de 0, on a

$$z \coth(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

On écrit $z \coth(\pi z) = \frac{2z}{e^{2z}-1} + z$. Un calcul explicite donne $B_1 = -1/2$, et donc

$$z \coth(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} (2z)^n - 2B_1 z.$$

La partie de $z \coth(z)$ permet de conclure que les coefficients d'ordre impair dans ce développement sont nuls, et donc finalement

$$z \coth(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2z)^{2n}.$$

3. On pose $f(z) = \frac{\cot(\pi z) \coth(\pi z)}{z^{4k+3}}$. Déterminer ses pôles, leurs ordres et leurs résidus. La fonction f a un pôle d'ordre $4k+5$ en 0 et des pôles simples sur le reste de $\mathbb{Z}$ et $i\mathbb{Z}$. Comme $\cot(\pi z)$ a un résidu de $\frac{1}{\pi}$ en tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\coth(\pi z)$ a un résidu de $\frac{1}{\pi}$ en tout $in \in i\mathbb{Z}$, le résidu de f en n est $\frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}\pi}$ et le résidu de f en in est $\frac{\cot(in\pi)}{(in)^{4k+3}\pi} = \frac{\coth(n\pi)}{i^{4k+4}n^{4k+3}\pi}$. Reste à déterminer le résidu en 0, qui est le coefficient d'ordre -1 dans le produit. Pour simplifier, on peut se rendre compte que

$$\pi z \coth(\pi z) = -2 \sum_{n \geq 0} (-1)^n \zeta(2n) z^{2n}$$

et donc $\pi z \cot(\pi z) = -2 \sum_{n \geq 0} \zeta(2n) z^{2n}$ en utilisant $\cot(z) = i \coth(iz)$. De là, on calcule explicitement

$$z^2 \coth(\pi z) \cot(\pi z) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\ell+m=n} (-1)^m \zeta(2m) \zeta(2\ell) \right) z^{2n}.$$

Pour obtenir f , on doit multiplier par z^{-4k-5} , et le résidu de f en 0 sera donc le coefficient de z^{4k+4} , c'est-à-dire

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{2k+2} (-1)^m \zeta(2m) \zeta(4k+4-2m).$$

4. Démontrer, grâce à une méthode similaire à l'exercice précédent, la formule

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{2k+2} (-1)^{m+1} \zeta(2m) \zeta(4k+4-2m)$$

où on normalise $\zeta(0) = -\frac{B_0}{2} = -\frac{1}{2}$. En déduire la valeur de T_k . On obtient donc une formule de la forme $\zeta(4k+3) = c_k \pi^{4k+3} + 2T_{4k+3}$, avec c_k un nombre rationnel explicite : à condition de savoir calculer π , c'est une série qui converge beaucoup plus vite vers $\zeta(4k+3)$!

On intègre encore sur le même carré et les bornes se passent en gros de la même façon. Le théorème des résidus donne donc

$$\sum_{n \neq 0} \text{Res}_n(f) + \sum_{n \neq 0} \text{Res}_{in}(f) + \text{Res}_0(f) = 0.$$

On trouve donc

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{2k+2} (-1)^m \zeta(2m) \zeta(4k+4-2m) = 0$$

et en exploitant la parité de $\coth(\pi z)/z^{4k+3}$ et en réarrangeant

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{2k+2} (-1)^{m+1} \zeta(2m) \zeta(4k+4-2m).$$

L'exercice précédent donne que $\zeta(2k)$ est de la forme $\pi^{2k} q_k$ avec q_k rationnel, et donc $\frac{1}{\pi} \zeta(2m) \zeta(4k+4-2m)$ est égal $\pi^{4k+3} q_{2m} q_{4k+4-2m}$.

 Exercice 12. Séries de Fourier de formes modulaires.

On définit, pour $\Im(\tau) > 0$:

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}}.$$

On considère, pour $\Im(w) > 0$, la fonction méromorphe

$$f_w(z) = \frac{2i\pi}{(z - w)^{2k}(e^{2i\pi z} - 1)}.$$

1. Déterminer les résidus de f_w en chaque $m \in \mathbb{Z}$.

Le résidu de f_w en $m \in \mathbb{Z}$ est $\frac{1}{(m-w)^{2k}}$ car $1/(z-w)^{2k}$ n'y a ni zéro ni pôle et $\frac{2i\pi}{e^{2i\pi z}-1}$ y a un pôle de résidu 1.

2. Démontrer que le résidu de f_w en w est donné par

$$\text{Res}_w(f_w) = -\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{d \geq 1} d^{2k-1} e^{2i\pi dw}.$$

On utilise la formule par la dérivée du résidu : f_w a un pôle d'ordre $2k$ en w . Comme $\Im(w) > 0$, on a $\frac{2i\pi}{e^{2i\pi z}-1} = -2i\pi \sum_{d \geq 0} e^{2i\pi dz}$ au voisinage de w car $|e^{2i\pi z}| = e^{-2\pi \Im(z)}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Res}_w(f_w) &= \frac{1}{(2k-1)!} \frac{\partial^{2k-1}}{\partial z^{2k-1}} \left(-2i\pi \sum_{d \geq 0} e^{2i\pi dz} \right)_{z=w} \\ &= -2i\pi \frac{1}{(2k-1)!} \sum_{d \geq 1} (2i\pi d)^{2k-1} e^{2i\pi dw}. \end{aligned}$$

3. En intégrant f_w sur le carré de coins $\pm(N+1/2) \pm (N+1/2)i$, démontrer que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m-w)^{2k}} = \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{d \geq 1} d^{2k-1} e^{2i\pi dw}$$

On note $\sigma_k(r) := \sum_{d|r} d^k$.

Même rengaine que d'habitude, l'intégrale sur le grand carré converge vers 0 donc la somme des résidus de la fonction est nulle, ce qui donne l'égalité vu les résidus.

4. Démontrer, pour $\Im(\tau) > 0$:

$$\sum_{n \neq 0, m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}} = 2 \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{r \geq 1} \sigma_{2k-1}(r) q^r$$

où $q = e^{2i\pi\tau}$.

On décompose les sommes en $n > 0$ et $n < 0$. En faisant un changement $m \rightarrow -m$, on voit que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}, n > 0} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}} = \sum_{m \in \mathbb{Z}, n > 0} \frac{1}{(m - n\tau)^{2k}}.$$

On calcule donc cette deuxième somme. Comme elle converge absolument, on peut changer l'ordre de sommation

$$\sum_{n > 0} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{m - n\tau} \right) = \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n \geq 1} \sum_{d \geq 1} d^{2k-1} q^{nd}.$$

La deuxième double somme converge également absolument : c'est une série entière en q où l'on somme un nombre fini de termes pour chaque puissance de q - on peut même constater que son rayon de convergence est 1 avec quelques estimations. On peut poser $r = np$, et on a

$$\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n \geq 1} \sum_{d \geq 1} d^{2k-1} q^{nd} = \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{r \geq 0} \left(\sum_{d|r} d^{2k-1} \right) q^r.$$

On obtient donc l'égalité voulue pour la somme sur $n < 0$, et en rajoutant l'autre moitié de la somme, on obtient bien

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}} = 2 \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{r \geq 0} \sigma_{2k-1}(r) q^r.$$

5. En utilisant le résultat de l'exercice 10, démontrer que

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) \left(1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{r \geq 1} \sigma_{2k-1}(r) q^r \right).$$

On commence par utiliser le fait que

$$G_{2k}(\tau) = 2 \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{r \geq 0} \sigma_{2k-1}(r) q^r + \sum_{n=0, m \neq 0} \frac{1}{m^{2k}} = 2 \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{r \geq 0} \sigma_{2k-1}(r) q^r + 2\zeta(2k).$$

Il s'agit alors simplement d'utiliser la formule de $\zeta(2k)$ pour vérifier que

$$2 \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)! 2\zeta(2k)} = -\frac{4k}{B_{2k}}.$$

6. Démontrer que $G_{2k}(-\frac{1}{\tau}) = \tau^{2k} G_{2k}(\tau)$, et en déduire que $G_{4k+2}(i) = 0$.

C'est un calcul direct :

$$\sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m - n/\tau)^{2k}} = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{\tau^{2k}}{(m\tau - n)^{2k}} = \tau^{2k} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m\tau + n)^{2k}}.$$

On a donc $G_{4k+2}(i) = G_{4k+2}(-1/i) = i^{4k+2} G_{4k+2}(i) = -G_{4k+2}(i)$, d'où $G_{4k+2}(i) = 0$.

7. Démontrer que

$$\sum_{r \geq 1} \sigma_{2k-1}(r) q^r = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{2k-1} q^n}{1 - q^n}$$

et en déduire que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^{4k+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{B_{4k+2}}{8k+4}.$$

On écrit

$$\sum_{r \geq 1} \sigma_{2k-1}(r) q^r = \sum_{n \geq 1} \sum_{d \geq 1} d^{2k-1} q^{nd}.$$

En intervertissant les sommes, on obtient

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{d \geq 1} d^{2k-1} q^{nd} = \sum_{d \geq 1} d^{2k-1} \sum_{n \geq 1} q^{nd} = \sum_{d \geq 1} \frac{d^{2k-1} q^d}{1 - q^d}.$$

En appliquant la formule à $q = e^{2i\pi i} = e^{-2\pi}$, et comme $G_{4k+2}(i) = 0$, on trouve

$$1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n \geq 1} \frac{n^{4k+1}}{e^{2n\pi} - 1} = 0.$$